



INTERNATIONAL CONFERENCE "COMPLEX AND HYPERCOMPLEX ANALYSIS AND THEIR APPLICATIONS"

**UKRAINE, ZHYTOMYR
AUGUST 6 – 10, 2025**

ABSTRACTS

of Section two

**Problems of teaching methods of
subjects and integrated courses of the
physics and mathematics cycle in the
New Ukrainian School**

Zhytomyr 2025

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine
Municipal Institution "Zhytomyr Regional Institute of Postgraduate
Pedagogical Education" of Zhytomyr Regional Council
Hlybochytsia Village Council of Zhytomyr District of Zhytomyr Region

INTERNATIONAL CONFERENCE "COMPLEX AND HYPERCOMPLEX ANALYSIS AND THEIR APPLICATIONS"

UKRAINE, ZHYTOMYR
AUGUST 6 — 10, 2025

ABSTRACTS

of Section two

Problems of teaching methods of subjects
and integrated courses of the physics and
mathematics directions in the
New Ukrainian School

Zhytomyr 2025

International Conference "Complex and hypercomplex analysis and their applications": Abstracts. Kyiv: Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, 2025. — 66 p.

ORGANIZING COMMITTEE

Director of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Academician of the National Academy of Sciences of Ukraine

Alexander TIMOKHA (co-chairman),

Director of the Zhytomyr Regional Institute of Postgraduate Pedagogical Education

Ihor SMAGIN (co-chairman),

Tahir ALIYEV AZEROGLU (Turkey), **Cristina FLAUT** (Romania), **Oleh HERUS** (Ukraine), **Anatoly GOLBERG** (Israel), **Yuri KARLOVICH** (Mexico), **Vladimir KISIL** (United Kingdom), **Massimo LANZA de CRISTOFORIS** (Italy), **Oleg LIMARCHENKO** (Ukraine), **Maria Elena LUNA-ELIZARRARAS** (Israel), **Oleksandr PASTOVENSKYI** (Ukraine), **Sergiy PLAKSA** (Ukraine), **Vitalii SHPAKIVSKYI** (Ukraine), **Maksym TKACHUK** (Ukraine)

The conference program includes two sections:

1. Complex and hypercomplex analysis and their application.
2. Problems of teaching methods of subjects and integrated courses of the physics and mathematics directions in the New Ukrainian School.

© Institute of Mathematics of the National
Academy of Sciences of Ukraine, 2025

Олександр Сарана,

доцент кафедри математичного аналізу,
бізнес-аналізу та статистики,
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
Житомирський державний університет імені Івана Франка

ЗАСТОСУВАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФУНКЦІЙ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАВДАНЬ МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД

Однією з обов'язкових тем занять математичного гуртка є використання властивостей функцій для розв'язування рівнянь та систем рівнянь підвищеної складності. Такі задачі регулярно використовуються на різних олімпіадах з математики [1], [2], [3], [4], [5].

Часто при розв'язуванні таких задач використовуються наступні властивості функції: **обмеженість, парність, непарність, періодичність, монотонність**. Розглянемо приклади таких завдань.

Одна з поширених ідей використання обмеженості функції полягає у наступному твердженні: *якщо при всіх допустимих значеннях змінної x виконуються нерівності $f(x) \geq A$, $g(x) \leq A$, то рівняння $f(x) = g(x)$ рівносильне системі рівнянь*
$$\begin{cases} f(x) = A; \\ g(x) = A. \end{cases}$$

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 8x - x^2 - 12 = \sqrt{x + 4y}, \\ 3x - 4y = \sqrt{x + 4y - 16}. \end{cases}$$

Розв'язання. З умови $x + 4y - 16 \geq 0$ отримуємо $\sqrt{x + 4y} \geq 4$, а тому $8x - x^2 - 12 \geq 4$, звідси $x = 4$. З системи
$$\begin{cases} 4 = \sqrt{4 + 4y}, \\ 12 - 4y = \sqrt{4y - 12} \end{cases}$$
 отримуємо $y = 3$, а тому відповідь: $x = 4$, $y = 3$.

Ідея використання парності функції полягає у наступному твердженні: якщо функція $f(x)$ парна (чи непарна) та x_0 – корінь рівняння $f(x) = 0$, то $(-x_0)$ також корінь цього рівняння.

Приклад 2. Знайти значення параметра a , при яких рівняння

$$a^2 \cdot \cos x - 8 = a(2 + |x|)$$

має єдиний корінь.

Розв’язання. Оскільки ліва та права частини рівняння є парні функції, то єдиним коренем рівняння може бути лише $x_0 = 0$. Тому параметр a має задовольняти умові $a^2 - 8 = 2a$, звідки $a = 4$ або $a = -2$.

При $a = 4$ отримуємо рівняння $4 \cos x = 4 + |x|$, яке має єдиний розв’язок $x = 0$.

При $a = -2$ отримуємо рівняння $2 \cos x = 2 - |x|$, яке має п’ять розв’язків.

Відповідь: $a = 4$.

Ідея використання парності функції полягає у наступних твердженнях:

1) якщо функція $f(x)$ є строго монотонною, то рівняння $f(x) = A$ може мати не більше одного кореня;

2) якщо функція $f(x)$ є строго монотонною, то рівняння $f(g(x)) = f(h(x))$ рівносильне рівнянню $g(x) = h(x)$ (за умови, що область визначення функції $f(x)$ містить область значень функцій $g(x)$ та $h(x)$), зокрема у разі монотонності функції $f(x)$ рівняння $f(f(x)) = f(x)$ рівносильне рівнянню $f(x) = x$.

Приклад 3. Розв’язати рівняння

$$\sqrt{(5x - 8)(4x - 1)} - 4\sqrt{x + 9} = \sqrt{(x + 9)(4x - 1)} - 4\sqrt{5x - 8} + 11.$$

Розв’язання. Область визначення рівняння: $x \in [1,6; +\infty)$. Запишемо дане рівняння у вигляді:

$$(\sqrt{5x - 8} - \sqrt{x + 9})(\sqrt{4x - 1} + 4) = 11.$$

Неважко довести, що функції $f(x) = \sqrt{5x - 8} - \sqrt{x + 9}$ та $g(x) = \sqrt{4x - 1} + 4$ є зростаючими на проміжку $[1,6; +\infty)$, причому $f(x) < 0$ для $x \in [1,6; 4,25)$, $f(x) \geq 0$ для $x \in [4,25; +\infty)$, $g(x) > 0$ для $x \in [1,6; +\infty)$. Тому функція $f(x)g(x)$ є неперервною, набуває від’ємних значень на проміжку $[1,6; 4,25)$ та є зростаючою на проміжку $[4,25; +\infty)$. Отже, рівняння $f(x)g(x) = 11$ не має коренів

на проміжку $[1,6; 4,25)$ та має не більше одного кореня на проміжку $[4,25; +\infty)$. Шляхом підбору знаходимо, що цей корінь $x = 7$.

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 8\operatorname{tg} x = 5\sin y + 3y, \\ 8\operatorname{tg} y = 5\sin x + 3x. \end{cases}$$

якщо $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Віднявши рівняння системи, отримуємо, що розв'язок повинен задовольняти рівняння-наслідок:

$$8\operatorname{tg} x + 5\sin x + 3x = 8\operatorname{tg} y + 5\sin y + 3y.$$

Розглянемо функцію $f(x) = 8\operatorname{tg} x + 5\sin x + 3x$ для $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Її похідна $f'(x) = \frac{8}{\cos^2 x} + 5\cos x + 3 > 0$ для всіх $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, отже $f(x)$ є зростаючою на цьому проміжку. Тому вказане вище рівняння $f(x) = f(y)$ може виконуватись лише при виконанні умов $x = y$, $8\operatorname{tg} x + 5\sin x + 3x = 0$. Оскільки при всіх $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ виконується $\sin x < x < \operatorname{tg} x$, а при всіх $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ виконується $\sin x > x > \operatorname{tg} x$, то єдиним розв'язком системи є пара чисел $x = y = 0$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + x}}}} = x.$$

Розв'язання. Функція $f(x) = \sqrt{12 + x}$ є зростаючою, а її область визначення $D(f) = [-12, +\infty)$ містить її область значень $E(f) = [0, +\infty)$. Тому при $-12 \leq x < \sqrt{12 + x}$ виконується

$$x < \sqrt{12 + x} < \sqrt{12 + \sqrt{12 + x}} < \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + x}}} < \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + x}}}},$$

а при $x > \sqrt{12 + x}$ виконується

$$x > \sqrt{12+x} > \sqrt{12+\sqrt{12+x}} > \sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+x}}} > \\ \sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12+x}}}}.$$

Тому дане рівняння рівносильне рівнянню $x = \sqrt{12+x}$, з якого знаходимо відповідь: $x = 4$.

Список використаних джерел та літератури

1. Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А. Математичні олімпіади школярів України: 1991-2000 рр. Київ: "Техніка", 2003. - 541с.
2. Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А. Математичні олімпіади школярів України: 2001-2006 рр. Львів: "Каменярь", 2008. - 348 с.
3. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2014-2015. / Аннікушин А.В., Клурман О.О. та ін.: за ред. Б.В.Рубльова. Харків: "Гімназія", 2016. – 464 с.
4. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2021-2022. / Аннікушин А.В., Жук І.В. та ін.: за ред. Б.В.Рубльова. Харків: "Гімназія", 2023. – 384 с.
5. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч. Тернопіль: Навчальна книга - Богдан, 2011. 400 с.

INTERNATIONAL CONFERENCE ”COMPLEX AND HYPERCOMPLEX ANALYSIS AND THEIR APPLICATIONS”

Комп’ютерна верстка *Максим ТКАЧУК*

Підп. до друку 02.07.2025. Формат $60 \times 84/8$. Папір друк.
Офс. друк. Фіз. друк. арк. 2,79. Ум. друк. арк. 2,79. Тир. 150.

Інститут математики НАН України
01024, Київ, вул. Терещенківська, 3

